Attuari Domani

Editoriale

Cari colleghi, come tutti avrete notato il 2007 si è aperto con una serie di novità che riguardano l'economia italiana ed in particolare il comparto assicurativo: dal primo gennaio è entrata in vigore la riforma del TFR, che nelle intenzioni del governo ha il compito di rafforzare il pilastro della previdenza complementare; sempre il primo gennaio è avvenuta la nascita del nuovo soggetto bancario "Intesa Sanpaolo" destinato a modificare lo scenario bancario e assicurativo dei prossimi anni; dal primo febbraio è partita una vera e propria rivoluzione nel mondo delle assicurazioni auto perché è stato introdotto il risarcimento diretto: in caso di incidente stradale i danneggiati non responsabili (o responsabili solo in parte) si rivolgeranno, per essere risarciti, direttamente al proprio assicuratore anziché a quello del veicolo che li ha danneggiati.

C'è da immaginarsi che tutti questi cambiamenti si rifletteranno anche nel mondo attuariale e saranno sempre più di stimolo per lo sviluppo nella nostra professione.

Da parte nostra, con il notiziario "Attuari Domani", cercheremo di tenervi aggiornati su tutte le tematiche attuariali ed assicurative in genere, ma ricordatevi che tutto ciò non può essere reso possibile se mancano i contributi da parte vostra, per cui vi invitiamo a scriverci e proporre nuovi articoli per il notiziario.

Questo numero contiene un contributo pervenuto via mail sul secondo dei quantitative impact studies (QIS) emanati dal Ceiops, nonché la prima parte del contributo del collega Emanuele Vannucci dell'Università di Pisa sulla generazione di numeri e variabili casuali; la parte successiva sarà affrontata nei prossimi notiziari.

Il comitato di redazione

Sommario

Attuari Domani

Notiziario periodico
Numero 2 - III anno
Anno 2006/2007
Luglio-Marzo 2007

Comitato di redazione:
Miriam Grinover
Daniela Marucci
Raffaella Sirianni

Per inviare materiale e contributi:
attuaridomani@tiscali.it
gruppodidiscussione professionale:
attuaridomani@yahoogroups.com

Per ricevere il notiziario scrivi una mail all'indirizzo attuaridomani@tiscali.it e indica l'indirizzo di posta elettronica dove desideri riceverlo

Giornata Seminariale

"La Previdenza Complementare, Rischi e Modelli per la Gestione Finanziaria, i Prodotti Variable Annuities"

Roma, 10 Maggio 2007
Grand hotel Villa Carpegna, Via Aurelia 481
Per informazioni: www.attuariale.com

Corsi e seminari

- 10 – 13 Giugno 2007 – 1st Life Colloquium – Stoccolma – Svezia
- 12 – 15 Giugno 2007 – 16th AFIR Colloquium – Stoccolma – Svezia
- 19 – 22 Giugno 2007 – 37th Astin Colloquium – Orlando - Usa
- 19 – 21 settembre 2007 – VIII Congresso Nazionale degli Attuari –Trieste
- 7 – 12 marzo 2010 – ICA 2010 – Cape Town Africa del Sud – www.ica2010.com
- SIFA - La Società di Sviluppo Iniziative di Formazione Attuariale ha pubblicato sul sito il calendario di corsi. Per informazioni: www.sifa-attuari.it/calendario

Il QIS2 e le nuove regole per il calcolo delle riserve tecniche

Nell'estate 2006 le imprese di assicurazioni sono state chiamate a partecipare al secondo studio di impatto quantitativo (QIS2), secondo le indicazioni fornite dal CEIOPS, organismo che svolge, su incarico della Commissione Europea, un'attività di raccolta di informazioni, sia di carattere qualitativo che quantitativo, dai singoli mercati europei, con l'obiettivo di valutare l'impatto del progetto Solvency II in relazione a nuovi criteri per il calcolo delle riserve tecniche e dei requisiti di solvibilità.

L'obiettivo dichiarato del QIS2 era quello di testare le nuove metodologie di calcolo sia delle riserve tecniche che dei requisiti di solvibilità (Solvency Capital Requirement: SCR e Minimum Capital Requirement: MCR). Seppure facoltativa, la partecipazione agli studi di impatto quantitativo rappresenta un'importante occasione per le imprese per iniziare a valutare, concretamente, gli impatti operativi dell'introduzione nel mercato delle nuove regole di Solvency II.

I dati e le informazioni forniti dalle imprese partecipanti sono stati raccolti dalle singole Autorità nazionali e sono stati riassunti in un summary report disponibile sul sito del CEIOPS.

Secondo le nuove logiche di calcolo, le riserve tecniche devono essere definite come il "prezzo" degli impegni assunti dall'assicuratore, tenuto conto delle specificità dei singoli portafogli, del tipo di rischi assicurati, degli attivi detenuti e della realtà gestionale di ciascuna impresa. I metodi di valutazione della riserva dovranno essere basati, quindi, sulle stesse logiche che ispirano i modelli, in uso nel mercato finanziario, per prezzare i titoli.

Entrando nel merito del QIS2, il CEIOPS ha richiesto alle imprese di calcolare le passività di bilancio seguendo un approccio di tipo misto:

- market-consistent per la parte di riserva riconducibile ai rischi hedgeable, ossia a quei rischi il cui valore fosse leggibile sul mercato, come ad esempio per i rischi finanziari;
- best estimate + risk margin calcolato al 75° percentile per la parte di riserva relativa ai rischi non hedgeable, come ad esempio quelli assicurativi.

Le imprese partecipanti hanno simulato stocasticamente futuri cash-flow al variare di tutte le ipotesi attuariali ed economiche che potessere impattare sulle differenti classi di rischio identificate e hanno poi scontato tali flussi con tassi risk-neutral generati lungo ciascuna traiettoria ed individuati, attraverso appositi modelli, sulla base della struttura dei tassi fornita dal CEIOPS per ciascuna valuta. Il valore best estimate della riserva è stato quindi ricavato come media della distribuzione di probabilità derivata da tutte le traiettorie possibili della riserva. Il risk margin è stato invece calcolato come differenza tra il 75° percentile della distribuzione e la best estimate.

I fattori di rischio da prendere in considerazione per la valutazione delle riserve, sono stati espressamente indicati nelle specifiche tecniche fornite dal CEIOPS. In particolare , per i rami vita, è stato chiesto di tener conto dei rischi di mortalità e di longevità, di esercizio del diritto di riscatto e di opzioni garantite, delle ipotesi sulle spese; per i rami danni del rischio di tariffazione e di quello di riservazione.

Oltre ai rischi tipici del settore, nell'ambito delle simulazioni, è stato richiesto alle imprese di valutare anche altri elementi quali, ad esempio, il tasso di inflazione, le possibili azioni del management volte a modificare l'asset allocation o la politica commerciale e di offerta dei prodotti, i recuperi dai riassicuratori e la tassazione.

Alle imprese del settore vita è stato chiesto di fornire anche separata evidenza sia delle riserve tecniche corrispondenti al minimo garantito ed alle opzioni finanziarie contenute nei prodotti, sia delle riserve tecniche per futura partecipazione agli utili di tipo discrezionale. Le riserve tecniche complessive possono essere quindi calcolate come somma di due componenti: la riserva corrispondente al minimo garantito più l'opzione call scritta sui rendimenti dei fondi/gestioni sottostanti, a fronte della possibilità di beneficiare degli extra-rendimenti. La riserva complessiva pertanto si modifica istantaneamente in conseguenza del modificarsi del valore delle opzioni.

Con i nuovi criteri, tutti gli utili futuri dovranno essere esplicitati e si dovrà tener conto, oltre che degli elementi demografici, anche di tutti gli altri fattori in gioco quali i riscatti, le opzioni e le spese prevedibili. In taluni casi gli importi di riserva dei contratti tradizionali potranno addirittura risultare negativi.

Per monitorare e valutare rischi finanziari, il mondo della finanza offre modelli di simulazione stocastica market consistent. Per quanto riguarda i rischi tecnici, invece, il passaggio da metodi deterministici a metodi stocastici non è così agevole, soprattutto in considerazione della difficoltà di disporre di specifiche e coerenti distribuzioni di probabilità per i rischi di underwriting (mortalità, longevità, riscatti). Vi è infatti un'oggettiva difficoltà a definire la forma ed i parametri delle distribuzioni di probabilità per i rischi biometrici e per i rischi da abbandoni. Inoltre è stato osservato, in via generale, che il criterio dei percentili mal si concilia con una logica che dovrebbe ispirarsi al mercato.

Un'alternativa al metodo dei percentili, è il calcolo del risk margin come Cost of Capital (COC) secondo la pratica implementata dallo Swiss Solvency Test o dal CEA, approcci questi consentiti dal CEIOPS nel QIS2 in via facoltativa e aggiuntiva al metodo del 75° percentile.

Il Cost of Capital esprime il costo necessario all'impresa per disporre di un capitale di solvibilità (SCR) in grado di supportare il portafoglio in essere fino al run-off. Uno dei vantaggi nel calcolare il COC anziché il percentile, risiede nel fatto che esso è determinato in funzione dell'SCR e poiché, secondo quanto si sta delineando a livello europeo, l'SCR dovrebbe essere calcolato secondo una formula standard, i calcoli del risk margin sarebbero estremamente semplificati. Ciò comporterebbe notevoli vantaggi soprattutto per le piccole imprese che non dispongono di particolari modelli interni e di strutture organiche adeguate.

In relazione al settore danni una delle principali difficoltà emerse nelle valutazioni è stata quella di valutare le generazioni dei sinistri ed alcune linee di business non incluse nei triangoli run-off. E' stato osservato, inoltre, che l'uso di serie storiche di dati molto indietro nel tempo per proiettare dati futuri può inficiare la bontà delle stime. Una delle possibili soluzioni potrebbe essere quella di limitare l'analisi storica dei dati ad un periodo medio-breve (ad esempio agli ultimi 5 anni).

Per quanto riguarda gli effetti dell'introduzione delle nuove regole nel mercato italiano, è presumibile che gli attuali livelli di riservazione non subiranno sostanziali modifiche per il settore vita, mentre per il settore danni, se verranno confermati i principi di riserve sinistri scontate e di riconoscimento dei benefici di diversificazione tra rami diversi, c'è da attendersi una significativa riduzione delle riserve attuali.

Per l'estate 2007 è atteso il prossimo QIS, il cui obiettivo è quello di pervenire ad una più puntuale calibratura di tutti i parametri indispensabili nelle valutazioni.

Attuari Domani

Alcune considerazioni riguardo all'uso della simulazione di *Emanuele Vannucci*

Argomenti affrontati in questa prima parte
1. Generazione di numeri casuali: il controllo della qualità delle sequenze di numeri pseudo-casuali
2. Dalla simulazione della Uniforme in [0,1] alla simulazione di variabili aleatorie qualsiasi

Argomenti di una prossima seconda parte
3. I risultati delle simulazioni e l'inferenza sulle grandezze di interesse
4. Vari approcci nell'impiego della simulazione: stime puntuali, stime puntuali rettificate, stime intervallari, stima con prefissati livelli di precisione

Riferimento bibliografico della prima parte: Ripley Bryan D., *Stochastic Simulation*, Wiley, 1987.

Introduzione

In questo contesto con il termine **simulazione** ci si riferisce all'insieme dei principi e delle tecniche da usare nel condurre sperimentazioni di modelli in cui la valutazione delle grandezze di interesse dipende dalla probabilità assegnata alle realizzazioni di una o più variabili aleatorie, per le quali non si dispone di risultati analitici. La padronanza di questo strumento è da ritenersi sempre più utile a chi deve operare valutazioni in ambito attuariale, in quanto in tale ambito capitano sempre più spesso problemi di valutazione non affrontabili per via analitica.

1. Generazione di numeri casuali

Il **primo** aspetto, che è quello più comunemente inteso quando ci si riferisce al termine simulazione è soprattutto di ordine tecnico e consiste nell'impartire al calcolatore le istruzioni per selezionare identificazioni di elementi dei modelli in coerenza con date valutazioni di probabilità. Tale problema è sempre ricondotto a quello fondamentale di scegliere numeri macchina "a caso" (distribuzione uniforme) in un intervallo, in particolare spesso quello unitario $[0,1]$ (o, in funzione del generatore utilizzato, $(0,1]$ o $[0,1)$ o $(0,1)$).

Questo perché i linguaggi di programmazione prevedono specifiche e funzioni che eseguono rapidamente e soddisfacentemente tale operazione. Esiste una vasta letteratura sugli algoritmi di generazione di tali successioni di numeri: in pratica si rinuncia a ottenere sequenze di "veri" numeri a caso (uniformemente distribuiti in $[0,1]$ e stocasticamente indipendenti) e si ripiega su successioni generate in modo deterministico, per questo dette anche successioni di numeri pseudo-casuali.

La questione è poi stabilire se questi numeri possono o meno considerarsi un campione che ben rappresenta una successione di variabili aleatorie indipendenti e uniformemente distribuite in $[0,1]$ ovvero, impostare in modo corretto il controllo della qualità delle sequenze di numeri pseudo-casuali.
Senza aver la pretesa di una trattazione esaustiva di tali tecniche di controllo se ne segnalano alcune tra le più note e di facile implementazione.

Test di uniformità
A titolo esemplificativo riporto di seguito alcuni dati, per il controllo dell'uniformità di uno specifico generatore, relativi alla
media campionaria che dovrebbe essere vicina al valore medio della distribuzione uniforme, ovvero a 0.5,

varianza campionaria corretta, che dovrebbe essere vicina alla varianza della distribuzione uniforme, ovvero a $\frac{1}{12}=0.08\bar{3}$.

il conteggio delle frequenze negli intervalli $\left[0,\frac{1}{k}\right]$, $\left(\frac{1}{k},\frac{2}{k}\right]$, ..., $\left(\frac{k-2}{k},\frac{k-1}{k}\right]$, $\left(\frac{k-1}{k},1\right]$, indicate con f_1, f_2, ..., f_k, con k numero naturale maggiore di 1, che dovrebbero essere vicine a quelle teoriche mp_j, qui

$$mp_j=\frac{m}{k}$$

il valore del **test chiquadro**, che in questo contesto assume la rappresentazione

$$c^2=\sum_{j=1}^{k}\frac{\left(kf_j-m\right)^2}{km}$$

per il quale più basso è il valore migliore è l'adattamento della sequenza ottenuta alla distribuzione casuale voluta.

Test sulla indipendenza stocastica della sequenza
Senza pretesa di trattare in modo compiuto la questione mi limito a considerare una sola tecnica di controllo basata sulla superclassica distribuzione binomiale e ancora sul test chiquadro.

Trattasi del test per le frequenze di numeri di un dato sottintervallo di $[0,1]$ presenti in blocchi di lunghezza preassegnata: con riferimento a una sottosequenza di lunghezza m di una sequenza di numeri pseudo-casuali di lunghezza maggiore o uguale di m la si partisca in $\frac{m}{k}$ blocchi ognuno di ampiezza k. Se poi si conta quanti numeri di ogni blocco vanno a finire in un preassegnato sottointervallo $[c,d]$ di $[0,1]$ la distribuzione di probabilità di tale conteggio dovrebbe seguire, se vale l'ipotesi di indipendenza stocastica, una distribuzione binomiale di parametri $p = d - c$ e k.

Tenuto conto di quanti blocchi sul totale degli $\frac{m}{k}$ blocchi presentano la frequenza f_j per $j = 0,1,\ldots,k$ e delle frequenze teoriche

$$\frac{m}{k}\cdot p_j = \frac{m}{k}\cdot\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j} \quad \text{per } j = 0,1,\ldots,k$$

(p_j è proprio la probabilità binomiale riferita al numero di successi su k eventi equiprobabili, di probabilità p, e indipendenti) si può poi applicare ancora il test chiquadro che qui agisce come test per l'indipendenza.

Chi è interessato ad approfondire l'argomento "test di uniformità e test di indipendenza" può consultare il classico testo di Ripley, *Stochastic Simulation*, Wiley, 1987. Anche sulla rete si trova una nutrita varietà di proposte: quello (il test) qui presentato si denomina test delle frequenze (di una cifra o di numeri di un intervallo) in blocchi di ampiezza fissata, ma si può "continuare" con i test sui run, con i test per i tempi di attesa, con i test delle passeggiate aleatorie...
In sintesi, l'indipendenza e l'uniformità sono fondamentali per avere garanzia della qualità di sequenze di numeri a caso. È curioso osservare che per avere una assoluta garanzia di indipendenza e di uniformità, basta avere un "motore"stocastico che produca una successione di esiti indipendenti anche soltanto scegliendoli tra due possibili con probabilità ignota ma costante: tale sequenza è agevolmente trasformabile in una sequenza di cifre binarie che consenta poi di fornire numeri uniformemente distribuiti in $[0,1]$ e indipendenti. Per esempio, paradossalmente, avendo anche soltanto una moneta distorta con una successione di lanci indipendenti testa-croce, già si potrebbe costruire la sequenza di 0 e di 1 con le caratteristiche richieste (probabilità 0.5 per 0 e 0.5 per 1 e indipendenza stocastica nella successione delle cifre binarie). Come? Basta nella successione tenere conto degli esiti di due lanci successivi, trascurare le coppie testa-testa e croce-croce e considerare invece 0 per la coppia testa-croce e 1 per la coppia croce-testa.

2. Dalla simulazione della Uniforme in [0,1] alla simulazione di variabili aleatorie qualsiasi

Avendo risolto, o supponendo di aver risolto, il problema della generazione di sequenze di numeri pseudo-casuali, che fungono da campioni di sequenze di variabili aleatorie indipendenti e ugualmente distribuite in modo uniforme su $[0,1]$, diventa poi un fatto esclusivamente tecnico-analitico la produzione di sequenze di determinazioni di variabili aleatorie o di vettori di variabili aleatorie caratterizzate da predeterminate distribuzioni di probabilità analitiche o empiriche.
Ormai tra i vari ambienti software c'è una competizione nel fornire sequenze di numeri coerenti con una vasta gamma di distribuzioni di probabilità, tra cui molte di quelle più frequentemente impiegate in ambito attuariale. La cosa è così estesa e nota da rendere a prima vista superfluo l'oggetto di questo paragrafo, che invece è uno dei punti forti per gli studiosi che si propongono l'impiego della simulazione in settori ancora inesplorati.
Qui di seguito vengono delineate le principali tecniche per passare dalla generazione di realizzazioni di distribuzioni uniformi in $[0,1]$ alla generazione di realizzazioni di variabili aleatorie qualsiasi.
Si tratta di costruire un campione bernoulliano di numerosità prefissata n, $(x_1, x_2,\ldots, x_n)$, per una variabile aleatoria unidimensionale, X, avendo a disposizione un analogo campione bernoulliano per la variabile U uniformemente distribuita in $[0,1]$, rappresentato dalla m-pla $(u_1,u_2,\ldots,u_m)$, con $m \geq n$.
Ricordo che per campione bernoulliano s'intende ex ante la n-pla di variabili aleatorie $(X_1, X_2,\ldots, X_n)$ costituita da variabili indipendenti e tutte ugualmente distribuite come la variabile X associata alla popolazione: operativamente questo si ottiene con il reibussolamento dell'elemento selezionato in una successione di estrazioni indipendenti.

Metodo della funzione inversa
Se la variabile aleatoria X è caratterizzata dalla distribuzione di probabilità

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

e la F_X è invertibile (ciò accade se X è variabile aleatoria assolutamente continua, con F_X crescente) allora per costruire il campione $(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ si può procedere sfruttando tale proprietà, e si parla di simulazione stocastica basata sul metodo della funzione inversa, ottenendo per $h=1,2,\ldots,n$

$$x_h = F_X^{-1}(u_h) \qquad (2)$$

Tale risultato si basa sul fatto che la variabile aleatoria $U = F_X(X)$ è uniformemente distribuita su $[0,1]$: è infatti per $u \in [0,1]$

$$P(U \le u) = P(F_X(X) \le u) = F_X\left(F_X^{-1}(u)\right) = u$$

O, equivalentemente, che la variabile aleatoria $F_X^{-1}(U)$, dove U è uniformemente distribuita su $[0,1]$, coincide con X

$$P\left(F_X^{-1}(U) \le x\right) = P(X \le x)$$

Se la F_X non è totalmente invertibile, ha cioè tratti in cui è costante o presenta discontinuità a sinistra (è generalmente continua a destra) in corrispondenza di probabilità concentrate su particolari determinazioni della variabile aleatoria X, allora si individua x_h assumendo

$$x_h = \inf\{x : F_X(x) \ge u_h\} \qquad (3)$$

L'efficenza operativa della (2) e della (3) dipende dalla facilità con cui si inverte la F_X. Ciò accade per diverse importanti distribuzioni sia di tipo discreto che di tipo continuo.

In particolare per le variabili aleatorie discrete finite (e in questa famiglia ricadono tavole di eliminazione o di sopravvivenza, distribuzioni empiriche...), una volta rappresentata la variabile aleatoria da sperimentare, X, dalle determinazioni $x_1 < x_2 < \ldots < x_r$ e dalle rispettive probabilità p_1, p_2, ..., p_r, si tratta di confrontare il numero $u_h \in (0,1)$ della sequenza con le cumulate

$$0 \le p_1 \le p_1 + p_2 \le \ldots \le p_1 + \ldots + p_{r-1} \le p_1 + \ldots + p_r = 1$$

e, qualora sia soddisfatta la (se $s=1$ il primo membro della successiva catena di disuguaglianze è nullo)

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_{s-1} \le u_h < p_1 + p_2 + \ldots + p_s$$

si pone

$$x_h = x_s$$

A u_h si fa corrispondere uno e un solo x_h: in tal modo non ci sono sprechi e per costruire un campione di dimensione n basta disporre di una sequenza di numeri casuali in $(0,1)$ di lunghezza n.

Il caso discreto-finito è di particolare interesse in ambito attuariale basti pensare, per esempio, alla realizzazione di campioni di ulteriore durata di vita di assicurati e/o anche di ulteriore durata in servizio di iscritti attivi per valutazioni attuariali di tipo previdenziale. Disponendo di una tavola di eliminazione a più cause di uscita, quali decesso, dimissioni, invalidità, invalidità per causa di servizio, inabilità, inabilità per causa di servizio e "ingordamente" considerando anche i prodotti logici di tali cause con le possibili composizioni del nucleo superstite si può in un sol colpo (cioè utilizzando solo un numero della sequenza di servizio) stabilire l'anno di eliminazione (e, per interpolazione lineare, addirittura anche il mese...), la causa della stessa e la composizione del nucleo superstite.

Per quanto riguarda le distribuzioni di probabilità unidimensionali di tipo continuo, questa procedura si applica efficacemente per diverse tipologie di variabili tra cui si segnalano le seguenti particolarmente significative per le applicazioni assicurative.

Esponenziale

(classica distribuzione del singolo risarcimento e anche tempo di intercorrenza tra l'arrivo di due successivi sinistri in un processo di conta di tipo poissoniano)

$F_X(x) = 1 - \exp(-bx)$ con b reale positivo e $x \in [0,+\infty)$

per la quale, essendo $F_X^{-1}(u) = \dfrac{\ln(1-u)}{-b}$, risulta

$x_h = \dfrac{\ln(1-u_h)}{-b}$ per $h=1,2,\ldots,n$

Weibull

(distribuzione di risarcimenti con code "spesse")

$F_X(x) = 1 - \exp\left(-bx^a\right)$ con a,b reali positivi e $x \in [0,+\infty)$

per la quale, essendo $F_X^{-1}(u) = \left(\ln(1-u) - b\right)^{\frac{1}{a}}$, risulta

$x_h = \left(\ln(1-u_h) - b\right)^{\frac{1}{a}}$ per $h=1,2,\ldots,n$

Pareto

(distribuzioni di risarcimenti con code "spesse")

Un esempio delle distribuzioni associate a V. Pareto è

$F_X(x) = 1 - (ax)^b$ con a,b reali positivi e $x \in [a,+\infty)$

per la quale, essendo $F_X^{-1}(u) = a \cdot (1-u)^{-\frac{1}{b}}$, risulta

$x_h = a \cdot (1-u_h)^{-\frac{1}{b}}$ per $h = 1,2,\ldots,n$

Gumbel
(distribuzioni di risarcimenti con code "spesse")

$F_X(x) = \exp\left(-e^{-b(x-a)}\right)$ con $b > 0$, a,b reali positivi e $x \in (-\infty,+\infty)$

per la quale, essendo $F_X^{-1}(u) = a + \dfrac{\ln(-\ln u)}{-b}$, risulta

$x_h = a + \dfrac{\ln(-\ln u_h)}{-b}$ per $h = 1,2,\ldots,n$

Metodo del rifiuto
Non si ha la possibilità di operare con il metodo della funzione inversa per molte e importanti, dal punto di vista applicativo, distribuzioni assolutamente continue. Una tecnica di portata assai generale, detta simulazione stocastica basata sul metodo del rifiuto, può essere utilizzata quando si conosca esplicitamente la funzione (non negativa) densità di probabilità, f_X, e non sia facile invertire la F_X. Si ricorda che $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$ per x reale e che, dove F_X sia derivabile, $dF_X(x) = f_X(x)\,dx$.
Per ottenere il campione bernoulliano associato a X, $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, con il metodo del rifiuto (ideato da von Neumann nel 1951) partendo da una sequenza di servizio $(u_1,u_2,\ldots,u_n,\ldots)$ (opportunamente più lunga di $2n$), si deve ipotizzare di saper facilmente campionare da una variabile aleatoria Y, dotata di una densità di probabilità g_Y con lo stesso spettro, S, di X (Y può essere scelta tra quelle per le quali si può usare il metodo della funzione inversa). Esista poi un M reale tale che per ogni $x \in S$ sia

$$\frac{f_X(x)}{g_Y(x)} \le M < +\infty$$

e si ponga

$$h(x) = \frac{f_X(x)}{M \cdot g_Y(x)} \le 1$$

Giunti al punto di dover individuare x_h avendo utilizzato la sequenza di servizio fino alla componente u_{2k-2}, si considera la coppia di valori della sequenza di servizio (u_{2k-1},u_{2k}): con il primo elemento della coppia si procura un valore della variabile Y e sia y; se poi risulta $u_{2k} \le h(y)$ allora si pone $x_h = y$. Se invece $u_{2k} > h(y)$ la coppia (u_{2k-1},u_{2k}) è rifiutata (da cui il nome del metodo) e, per dare una identificazione a x_h, si passa, usando la stessa procedura, alla successiva coppia (u_{2k+1},u_{2k+2}).
Questa tecnica si presta a notevoli implementazioni per "velocizzare" l'algoritmo di simulazione, ovvero riducendo la numerosità della sequenza per addivenire al campione $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ della dimensione desiderata, che per ragioni di brevità non verranno descritte in questo lavoro.
Alcuni esempi di distribuzioni continue per le quali può essere opportuno ricorrere al metodo del rifiuto.

Beta
Vale

$f_X(x) = \dfrac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{b(a,b)}$ con $a > 0$, $b \ge 1$, a,b reali e $x \in (0,1)$

per la quale si può prendere la densità di probabilità $g_Y(x) = ax^{a-1}$. Essendo

$$\frac{f_X(x)}{g_Y(x)} = \frac{a(1-x)^{b-1}}{b(a,b)} \le \frac{a}{b(a,b)} = M$$

risulta $h(x) = (1-x)^{b-1} \le 1$

In modo "simmetrico" si può procedere quando $a \ge 1$ e $b > 0$ considerando $g_Y(x) = b(1-x)^{b-1}$.

Gamma
Per il caso uniparametrico sia

$f_X(x) = \dfrac{x^{a-1}\exp(-x)}{\Gamma(a)}$ con a reale e maggiore di 1 e $x \in (0,+\infty)$

Per questo caso si può prendere la densità esponenziale $g_Y(x) = \dfrac{\exp\left(-\frac{x}{2}\right)}{2}$ ed essendo (si risolva il problema di massimo per la funzione $x^{a-1}\exp\left(-\frac{x}{2}\right)$)

risulta

$$h(x)=\frac{f_X(x)}{M\cdot g_Y(x)}=\frac{x^{a-1}\exp(-x2+a-1)}{(2a-2)^{a-1}}\le 1$$

Per $a=1$ la gamma dà come caso particolare la distribuzione esponenziale.
Nel caso in cui sia

$$f_X(x)=\frac{x^{a-1}\exp(-x)}{\Gamma(a)}$$ con a reale e appartenente a $(0,1)$ e $x\in(0,+\infty)$

si può ancora applicare il metodo del rifiuto: si può prendere la densità di probabilità $g_Y(x)=ax^{a-1}\exp\left(-x^a\right)$, che è una distribuzione di Weibull, per la quale si può procedere con il metodo della funzione inversa. Basta risolvere il banale problema di massimo per la funzione $\exp\left(x^a-x\right)$,
risulta

$$h(x)=\frac{f_X(x)}{M\cdot g_Y(x)}=\frac{\exp\left(x^a-x\right)}{\exp\left(a^{\frac{a}{1-a}}-a^{\frac{1}{1-a}}\right)}\le 1$$

Densità empiriche
Penso sia opportuno segnalare che per densità empiriche (derivanti per esempio da ”istogrammazioni” di dati reali) su intervalli chiusi e limitati $[a,b]$ se la densità f_X è limitata superiormente da L si può ricorrere alla Y uniformemente distribuita su $[a,b]$ con $g_Y(x)=\frac{1}{b-a}$ su (a,b), da cui
e

$$h(x)=\frac{f_X(x)}{L}$$

Metodi specifici per alcune distribuzioni di interesse
Si sono già elencate le classi di distribuzioni di probabilità per le quali il metodo della funzione inversa o il metodo del rifiuto possono essere utilmente, e quasi direttamente impiegati, ma mancano ancora importanti classi di distribuzioni all’appello. Per queste uno strumento spesso risolutivo è ricordare come le relative variabili aleatorie possano essere viste quali funzioni di altre variabili aleatorie efficacemente simulabili con le tecniche viste in precedenza.

Normale
Se si considerano due variabili normali standardizzate indipendenti, X e Y, la loro densità congiunta è

$$f_{XY}(x,y)=\frac{\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)}{2p}$$ con x e y reali

Se si procede alla trasformazione di variabili

$$W=\sqrt{X^2+Y^2} \qquad \text{e} \qquad Z=\arctan\frac{Y}{X} \qquad \text{ovvero}$$

$X=W\cos Z$ e $Y=W\sin Z$

allora la densità corrispondente a f_{XY} diventa (si ricorda che w è lo jacobiano della trasformazione) la

$$g_{WZ}(w,z)=f_{XY}(w\cos z, w\sin z)\cdot w=\frac{w\exp\left(-\frac{w^2}{2}\right)}{2p}$$

con $w\in[0,+\infty)$ e $z\in[0,2p)$.

Il risultato ottenuto fa vedere come $g_{WZ}(w,z)$ possa interpretarsi come distribuzione congiunta di due variabili aleatorie indipendenti: una, W, con distribuzione Weibull (simulabile facilmente con il metodo della funzione inversa) e l’altra, Z, con distribuzione uniforme su $[0,2p)$ (simulabile anch’essa facilmente con il metodo della funzione inversa).
Segue che da coppie della sequenza di servizio, (u_{2h-1},u_{2h}), si possono generare senza sprechi coppie di variabili normali standardizzate e indipendenti, (x_{2h-1},x_{2h}). In sintesi considerate, con il metodo della funzione inversa, $w=\sqrt{\ln(1-u_{2h-1})}$ e $z=2pu_{2h}$ si determinano da queste le
$x_{2h-1}=w\cos z$ e $x_{2h}=w\sin z$
Ovviamente per avere una sequenza di variabili normali di valore medio m e devianza s, basta sottoporre la variabile normale standardizzata X alla trasformazione lineare $m+sX$.

Lognormale
$X=e^Y$ con Y normale.

Erlang
Un altro caso notevole è costituito dalla distribuzione di Erlang, ovvero la sottoclasse della famiglia gamma caratterizzata dalla densità

$$f_X(x) = \frac{b^{n+1} x^n \exp(-bx)}{n!}$$

con n intero non negativo, b reale positivo e $x \in [0,+\infty)$.

Utilizzando la proprietà che la variabile X si può considerare anche quale somma di $n+1$ variabili esponenziali indipendenti di parametro b, per ottenere una sequenza di tali variabili basta utilizzare un gruppo di $n+1$ numeri della sequenza di servizio $(u_k, u_{k+1}, \ldots, u_{k+n})$ e considerare (metodo della funzione inversa per la distribuzione esponenziale)

$$x_h = \sum_{i=0}^{n} \frac{\ln(1-u_{k+i})}{-b}$$

Poisson
Un classico risultato dice che in un processo di Poisson di parametro l il numero degli arrivi in $[0,1]$ ha una distribuzione di Poisson di parametro l e che il tempo aleatorio tra due arrivi successivi ha una distribuzione esponenziale di parametro l: basterà allora sommare tanti addendi esponenziali (metodo della funzione inversa per ognuno) e considerare come realizzazione della variabile poissoniana, $X = n$, il numero minimo di addendi esponenziali, Y_1, Y_2,..., Y_n, Y_{n+1}, per i quali si verifica

$$Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n + Y_{n+1} > 1$$

Geometrica
Se p è il parametro della geometrica X, che ha determinazioni $1, 2, \ldots,$ e a è tale che $p = 1 - \exp(-a)$ allora vale, considerando la variabile aleatoria Y esponenziale di parametro a,

$$P(X = h) = P(h-1 \le Y < h) = \exp(-a)^{h-1}(1-\exp(-a))$$

e il valore campionato per la variabile geometrica è ottenibile da quello dell'esponenziale corrispondente: se u_j è il generico numero pseudo-casuale si considera pertanto (simbolo $\lfloor \bullet \rfloor$ per parte intera di $\bullet$)

$$x_j = \frac{\lfloor ln(1-u_j) \rfloor}{-a} + 1$$

Chiquadro

$$c^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(Y_i - m)^2}{s^2}$$

con Y_i indipendenti, normalmente e ugualmente distribuite di parametri m e s e che dà luogo al caso particolare della gamma

$$f_{c^2}(x) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$ con n intero positivo

e $x \in [0,+\infty)$

Student

$X = \frac{Y}{Z}$ con Y e Z indipendenti, Y normale di parametri $m = 0$ e $s = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $Z = \frac{\sqrt{c^2}}{\sqrt{n}}$ e che dà luogo alla

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(n+12)}{\sqrt{p} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \left(1+x^2\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$ con n intero positivo e x reale.

Conclusioni

Nella prima parte di questo contributo si è mostrato come per avere garanzia della qualità di sequenze di numeri "a caso" (distribuzione uniforme) nell'intervallo [0,1], ottenibili in qualunque ambiente software si operi, sia essenziale controllare sia la indipendenza e che la uniformità dei risultati delle sequenze ottenute.
Nella seconda parte si descrivono le metodologie per passare da realizzazioni di variabili uniformi in [0,1] a realizzazioni di variabili aleatorie qualsiasi: a tal proposito vengono presentati sia i classici metodi della funzione inversa e del rifiuto che altre metodologie da applicarsi per specifiche variabili aleatorie di interesse nelle applicazioni attuariali.

Emanuele Vannucci
e.vannucci@ec.unipi.it